

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Кудрявцев М.Г.  
Должность: Проректор по образовательной деятельности  
Дата подписания: 01.09.2024  
Уникальный программный ключ:  
790a1a8df2525774421adc1fc96453f0e902bfb0

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
МИНИСТЕРСТВА СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
**«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА  
ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО»**  
(Университет Вернадского)

Кафедра Цифровых систем и инженерных технологий

Принято Ученым советом  
Университета Вернадского  
«26» сентября 2024 г. протокол №2



«УТВЕРЖДЕНО»  
Проректор по образовательной деятельности  
Кудрявцев М.Г.  
«26» сентября 2024 г.

## Рабочая программа дисциплины

### Элементы компьютерной алгебры

Направление подготовки 44.04.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) программы Прикладная математика и информатика

Квалификация Магистр

Форма обучения **очная**

Балашиха 2024

Рабочая программа разработана в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование

Рабочая программа дисциплины разработана *доцентом кафедры цифровых систем и инженерных технологий, к.т.н. Рамазановой Г.Г.*

Рецензент: *доцент кафедры цифровых систем и инженерных технологий, к.э.н. Сидоров А.В.*

# 1. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с установленными в ОПОП ВО индикаторами достижения компетенций

## 1.1 Перечень компетенций, формируемых учебной дисциплиной

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций Планируемые результаты обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>	
ПК-1 Способен применять знания теоретической информатики, фундаментальной и прикладной математики для анализа и синтеза информационных систем и процессов	Знать: теоретическую информатику, фундаментальную и прикладную математику для анализа и синтеза информационных систем и процессов Уметь: Самостоятельно определяет тематику, цели, содержание, формы, методы и средства, ожидаемые результаты деятельности обучающихся, в том числе с особыми образовательными потребностями Владеть: способностью оценивать результаты анализа и синтеза информационных систем и процессов на всех этапах

## 2. Цели и задачи освоения учебной дисциплины, место дисциплины в структуре ОПОП ВО

Дисциплина «Элементы компьютерной алгебры» относится к части формируемой участниками образовательных отношений основной профессиональной образовательной программы высшего образования 44.04.01 Педагогическое образование, профиль «Прикладная математика и информатика».

Целями изучения дисциплины «Элементы компьютерной алгебры» является обеспечение формирования профессиональной компетентности у студентов в области компьютерной алгебры, позволяющей приобрести дополнительные теоретические и практические знания и умения в компьютерной алгебре, соответствующие современному состоянию этой области.

## 3. Объем учебной дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий, текущий и промежуточный контроль по дисциплине) и на самостоятельную работу обучающихся

Вид учебной работы	2 семестр
Общая трудоемкость дисциплины, зачетных единиц	3
<b>часов</b>	<b>108</b>
<b>Аудиторная (контактная) работа, часов</b>	<b>48,25</b>
в т.ч. занятия лекционного типа	16
занятия семинарского типа	32
промежуточная аттестация	0,25
<b>Самостоятельная работа обучающихся, часов</b>	<b>55,75</b>
Вид промежуточной аттестации	зачёт

## 4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

### 4.1 Перечень разделов дисциплины с указанием трудоемкости аудиторной (контактной) и самостоятельной работы, видов контролей и перечня компетенций

Наименование разделов и тем	Трудоемкость, часов			Код компетенции
	всего	в том числе		
		аудиторной (контактной) работы	самостоятельной работы	
<b>Раздел 1.</b> Аналитические преобразования и их реализация с помощью ЭВМ. Элементы теории делимости и сравнения в кольце целых чисел.	<b>59</b>	24	35	ПК-2
<b>Раздел 2.</b> Алгоритмы вычисления наибольшего общего делителя в кольце целых чисел и в кольце полиномов.	<b>45</b>	24,25	20,75	
<b>Итого за семестр</b>	<b>104</b>	48,25	55,75	
<b>Промежуточная аттестация</b>	4	0,25	-	
<b>ИТОГО по дисциплине</b>	<b>108</b>	<b>48,25</b>	<b>55,75</b>	

## 2. Содержание дисциплины по разделам

### Раздел 1. Аналитические преобразования и их реализация с помощью ЭВМ. Элементы теории делимости и сравнения в кольце целых чисел.

#### **Перечень учебных элементов раздела:**

Стимулы к развитию аналитических вычислений. О некоторых выдающихся аналитических вычислениях. Соотношение аналитических и численных вычислений. О связи компьютерной алгебры и систем аналитических вычислений. Теорема о делении с остатком. Соотношение Безу. Основная теорема арифметики. Алгоритм Евклида. Теорема Ламе. Расширенный алгоритм Евклида. Отношение сравнения по модулю  $m$ . Классы вычетов по модулю  $m$ . Кольцо классов вычетов. Китайская теорема об остатках. Модулярная арифметика. Смешанные системы счисления.

### Раздел 2. Алгоритмы вычисления наибольшего общего делителя в кольце целых чисел и в кольце полиномов.

#### **Перечень учебных элементов раздела:**

Алгоритмы вычисления НОД( $a,b$ ) в  $Z$  (алгоритм, основанный на сравнении и вычитании натуральных чисел; алгоритм Евклида; алгоритм - бинарный НОД; алгоритм вычисления НОД через примарное разложение; расширенный алгоритм Евклида). Оценка эффективности рассмотренных алгоритмов вычисления НОД. Алгоритмы вычисления НОД( $a,b$ ) в кольцах многочленов  $k[x]$  и  $Z[x]$ . Последовательность полиномиальных остатков (PRS). Обобщенный алгоритм Евклида для многочленов с целыми коэффициентами. Евклидов алгоритм PRS. Алгоритм примитивных PRS. Модулярный алгоритм вычисления НОД многочленов. Алгоритм проверки взаимной простоты многочленов. Границы для коэффициентов делителя полинома.

## 5. Оценочные материалы по дисциплине

Оценочные материалы по дисциплине представлены в виде фонда оценочных средств.

## 6. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины

### 6.1 Перечень учебно-методического обеспечения по дисциплине

№ п/п	Автор, название, место издания, издательство, год издания, количество страниц, режим доступа
1	Методические указания по изучению дисциплины

## **6.2 Перечень учебных изданий, необходимых для освоения дисциплины**

### **Основная литература:**

1. Фаддеев, Д. К. Лекции по алгебре / Д. К. Фаддеев. — 9-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 416 с. — ISBN 978-5-507-47249-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/346454>
2. Бусяцкая, И. К. Линейная алгебра. Лекции : учебное пособие для вузов / И. К. Бусяцкая. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 268 с. — ISBN 978-5-507-48428-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/380708>

### **Дополнительная литература:**

3. Глухов, М. М. Алгебра : учебник для вузов / М. М. Глухов, В. П. Елизаров, А. А. Нечаев. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 608 с. — ISBN 978-5-507-49133-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/379334>
4. Перельман, Я. И. Занимательная алгебра : научно-популярное издание / Я. И. Перельман. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 196 с. — ISBN 978-5-507-51458-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/422609>

## **6.3 Современные профессиональные базы данных, информационные справочные системы и лицензионное программное обеспечение**

### **Современные профессиональные базы данных, информационные справочные системы, цифровые электронные библиотеки и другие электронные образовательные ресурсы**

1. Договор о подключении к Национальной электронной библиотеке и предоставлении доступа к объектам Национальной электронной библиотеки №101/НЭБ/0502-п от 26.02.2020 5 лет с пролонгацией
2. Соглашение о бесплатном тестовом доступе к Polpred.com. Обзор СМИ 27.04.2016 бессрочно
3. Соглашение о бесплатном тестовом доступе к Polpred.com. Обзор СМИ 02.03.2020 бессрочно
4. Информационно-справочная система «Гарант» – URL: <https://www.garant.ru/>  
Информационно-справочная система Лицензионный договор № 261709/ОП-2 от 25.06.2021
5. «Консультант Плюс». – URL: <http://www.consultant.ru/> свободный доступ
6. Электронно-библиотечная система AgriLib <http://ebs.rgunh.ru/> (свидетельство о государственной регистрации базы данных №2014620472 от 21.03.2014).

### **Доступ к электронной информационно-образовательной среде, информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

1. Система дистанционного обучения Moodle [www.portfolio.rgunh.ru](http://www.portfolio.rgunh.ru) (свободно распространяемое)
2. Право использования программ для ЭВМ Mirapolis HCM в составе функциональных блоков и модулей: Виртуальная комната.
3. Инновационная система тестирования – программное обеспечение на платформе 1С (Договор № К/06/03 от 13.06.2017). Бессрочный.
4. Образовательный интернет – портал Университета Вернадского (свидетельство о регистрации средства массовой информации Эл № ФС77-51402 от 19.10.2012).

### Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение

1. OpenOffice – свободный пакет офисных приложений (свободно распространяемое)
2. linuxmint.com <https://linuxmint.com/> (свободно распространяемое)
3. Электронно-библиотечная система AgriLib <http://ebs.rgunh.ru/> (свидетельство о государственной регистрации базы данных №2014620472 от 21.03.2014) собственность университета.
4. Официальная страница ФГБОУ ВО МСХ РФ «Российский государственный университет народного хозяйства имени В.И. Вернадского» <https://vk.com/rgunh.ru> (свободно распространяемое)
5. Портал ФГБОУ ВО МСХ РФ «Российский государственный университет народного хозяйства имени В.И. Вернадского» (свободно распространяемое) <https://zen.yandex.ru/id/5fd0b44cc8ed19418871dc31>
6. Антивирусное программное обеспечение Dr. WEB Desktop Security Suite (Сублицензионный договор №13740 на передачу неисключительных прав на программы для ЭВМ от 01.07.2021).

### 6.4 Перечень учебных аудиторий, оборудования и технических средств обучения

Учебная аудитория для проведения лекционных занятий (поточная). Специализированная мебель, доска меловая, мультимедийное оборудование, проектор, экран настенный	143907, Московская область, г. Балашиха, ул. шоссе Энтузиастов, д.50, каб. 129 Площадь помещения 118,1 кв.м № по технической инвентаризации 140, этаж 1
Учебная аудитория для занятий лекционного типа, семинарского типа (семинары, практические занятия, практикумы, лабораторные работы, коллоквиумы), для проведения групповых консультаций и индивидуальной работы обучающихся с педагогическими работниками, для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации. Специализированная мебель, доска меловая. Персональные компьютеры в сборке с выходом в интернет.	143907, Московская область, г. Балашиха, ул. шоссе Энтузиастов, д. 50, каб. 142 Площадь помещения 69,1 кв.м № по технической инвентаризации 147, этаж 1
Помещение для самостоятельной работы. Персональные компьютеры в сборке с выходом в интернет.	143907, Московская область, г. Балашиха, ул. шоссе Энтузиастов, д. 50, читальный зал Площадь помещения 497,4 кв. м. № по технической инвентаризации 177, этаж 1
Помещение для самостоятельной работы. Специализированная мебель, персональные компьютеры в сборке с выходом в интернет.	143900, Московская область, г. Балашиха, ул. Юлиуса Фучика д.1, каб. 320 Площадь помещения 49,7 кв. м. № по технической инвентаризации 313, этаж 3
Учебная аудитория для учебных занятий обучающихся из числа инвалидов и лиц с ОВЗ. Специализированная мебель. Автоматизированное рабочее место для инвалидов-колясочников с коррекционной техникой и индукционной системой ЭлСис 290; Автоматизированное рабочее место для слабовидящих и незрячих пользователей со стационарным видеовеличителем ЭлСис 29 ON; Автоматизированное рабочее место для слабовидящих и незрячих пользователей с портативным видеовеличителем ЭлСис 207 CF; Автоматизированное рабочее место для слабовидящих и незрячих пользователей с читающей машиной ЭлСис 207 CN; Аппаратный комплекс с функцией видеовеличения и чтения для слабовидящих и незрячих пользователей ЭлСис 207 OS.	143907, Московская область, г. Балашиха, ул. шоссе Энтузиастов, д. 50, каб. 105 Площадь помещения 52,8 кв. м. № по технической инвентаризации 116, этаж 1

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
МИНИСТЕРСТВА СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
**«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА  
ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО»**  
(Университет Вернадского)

Кафедра Цифровых систем и инженерных технологий

**Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля и промежуточной  
аттестации обучающихся по дисциплине**

## **Элементы компьютерной алгебры**

Направление подготовки 44.04.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) программы Прикладная математика и информатика

Квалификация Магистр

Форма обучения **очная**

Балашиха 2024 г.

## 1. Описание показателей и критериев оценивания планируемых результатов обучения по учебной дисциплине

Компетенций	Индикатор сформированности компетенций	Уровень освоения	Планируемые результаты обучения
ПК-1 Способен применять знания теоретической информатики, фундаментальной и прикладной математики для анализа и синтеза информационных систем и процессов	<p><b>Знать (З):</b> теоретическую информатику, фундаментальную и прикладную математику для анализа и синтеза информационных систем и процессов</p> <p><b>Уметь (У):</b> Самостоятельно определяет тематику, цели, содержание, формы, методы и средства, ожидаемые результаты деятельности обучающихся, в том числе с особыми образовательными потребностями</p> <p><b>Владеть (В):</b> способностью оценивать результаты анализа и синтеза информационных систем и процессов на всех этапах</p>	<b>Пороговый (удовлетворительно)</b>	<p><b>Знать:</b> теоретическую информатику, фундаментальную и прикладную математику для анализа и синтеза информационных систем и процессов</p> <p><b>Уметь:</b> Самостоятельно определяет тематику, цели, содержание, формы, методы и средства, ожидаемые результаты деятельности обучающихся, в том числе с особыми образовательными потребностями</p> <p><b>Владеть:</b> способностью оценивать результаты анализа и синтеза информационных систем и процессов на всех этапах</p>
		<b>Продвинутый (хорошо)</b>	<p><b>Знать:</b> теоретическую информатику, фундаментальную и прикладную математику для анализа и синтеза информационных систем и процессов</p> <p><b>Уметь:</b> Самостоятельно определяет тематику, цели, содержание, формы, методы и средства, ожидаемые результаты деятельности обучающихся, в том числе с особыми образовательными потребностями</p> <p><b>Владеть:</b> способностью оценивать результаты анализа и синтеза информационных систем и процессов на всех этапах</p>
		<b>Высокий (отлично)</b>	<p><b>Знать:</b> теоретическую информатику, фундаментальную и прикладную математику для анализа и синтеза информационных систем и процессов</p> <p><b>Уметь:</b> Самостоятельно определяет тематику, цели, содержание, формы, методы и средства, ожидаемые результаты деятельности обучающихся, в том числе с особыми образовательными потребностями</p> <p><b>Владеть:</b> способностью оценивать результаты анализа и синтеза информационных систем и процессов на всех этапах</p>

## 2. Описание шкал оценивания

### 2.1 Шкала оценивания на этапе текущего контроля

Форма текущего контроля	Отсутствие усвоения (ниже порогового)*	Пороговый (удовлетворительно)	Продвинутый (хорошо)	Высокий (отлично)
Доклад	не выполнена или все задания решены неправильно	Цель и задачи доклада достигнуты частично. Актуальность темы определена неубедительно.	Цель и задачи выполнения доклада достигнуты. Актуальность темы подтверждена. Доклад	Цель написания доклада достигнута, задачи решены. Актуальность темы исследования

		В докладе выявлены значительные отклонения от требований методических указаний.	выполнен с незначительными отклонениями от требований методических указаний.	корректно и полно обоснована. Доклад выполнен согласно требованиям.
--	--	---	--	---

**2.2 Шкала оценивания на этапе промежуточной аттестации (зачет и экзамен, курсовая работа)**

Форма промежуточной аттестации	Отсутствие усвоения (ниже порогового)	Пороговый (удовлетворительно)	Продвинутый (хорошо)	Высокий (отлично)
Ответы на вопросы к зачёту	не выполнена или все задания решены неправильно	Цель и задачи вопроса достигнуты частично. Актуальность темы определена неубедительно.	Цель и задачи выполнения вопроса достигнуты. Актуальность темы подтверждена.	Цель написания ответа на вопрос достигнута, задачи решены.

**3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ**

**ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ДОКЛАДОВ**

1. Стимулы к развитию аналитических вычислений.
2. Соотношение аналитических и численных вычислений.
3. Связь компьютерной алгебры и систем аналитических вычислений.
4. Теорема о делении с остатком.
5. Соотношение Безу.
6. Основная теорема арифметики.
7. Алгоритм Евклида.
8. Теорема Ламе.
9. Расширенный алгоритм Евклида.
10. Отношение сравнения по модулю  $m$ .
11. Классы вычетов по модулю  $m$ . Кольцо классов вычетов.
12. Китайская теорема об остатках.
13. Модулярная арифметика.
14. Смешанные системы счисления.

**ПРИМЕРНЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ**

Задание 1. Докажите, что для любого натурального  $n$ :

- 1)  $52n - 1$  делится на 24;
- 2)  $4n + 6n - 1$  делится на 9.

Задание 2. Докажите, что для любого целого  $n$ :

- 1)  $n^3 - n$  делится на 3;
- 2)  $n^5 - n$  делится на 5;
- 3)  $n^7 - n$  делится на 7.

Задание 3. Вычислите НОД( $a$ ,  $b$ ) используя алгоритм Евклида

- 1)  $a = 1100005423$  и  $b = 1100000077$
- 2)  $a = 11010105$ ,  $b = 7767617$ .

Задание 4. Оцените число итераций, необходимых алгоритму Евклида, для нахождения НОД( $a$ ,  $b$ ). (Использовать теорему Ламе)

- 1)  $a = 1100005423$  и  $b = 3$
- 2)  $a = 1101010557485748574872$ ,  $b = 10$

Задание 5. Для чисел  $a$ ,  $b \in \mathbb{Z}$  найдите коэффициенты Безу. Используя расширенный алгоритм Евклида.

- 1)  $a = 1292$  и  $b = 798$
- 2)  $a = 657$ ,  $b = 12$

Задание 6. Докажите свойства сравнений:

- 1)  $a \equiv b \pmod{m}$ ,  $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$ ,  $a - c \equiv b - d \pmod{m}$ ;
- 2)  $a \equiv b \pmod{m}$ ,  $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$ ;
- 3)  $ac \equiv bc \pmod{m}$ ,  $\text{НОД}(c, m) = 1 \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$ ;
- 4)  $ac \equiv bc \pmod{mc} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$ ;
- 5)  $a \equiv b \pmod{mc} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

Задание 7. Определите (если возможно) число  $a$  обратное к числу  $b$  по модулю  $m$

- 1)  $b = 15$   $m = 7$
- 2)  $b = 3$   $m = 21$

## ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ

1. Стимулы к развитию аналитических вычислений.
2. Соотношение аналитических и численных вычислений.
3. Связь компьютерной алгебры и систем аналитических вычислений.
4. Теорема о делении с остатком.
5. Соотношение Безу.
6. Основная теорема арифметики.
7. Алгоритм Евклида.
8. Теорема Ламе.
9. Расширенный алгоритм Евклида.
10. Отношение сравнения по модулю  $m$ .
11. Классы вычетов по модулю  $m$ . Кольцо классов вычетов.
12. Китайская теорема об остатках.
13. Модулярная арифметика.
14. Смешанные системы счисления.
15. Алгоритмы вычисления НОД( $a,b$ ) в  $Z$  (алгоритм, основанный на сравнении и вычитании натуральных чисел). Оценка эффективности.
16. Алгоритмы вычисления НОД( $a,b$ ) в  $Z$  (алгоритм Евклида). Оценка эффективности.
17. Алгоритмы вычисления НОД( $a,b$ ) в  $Z$  (бинарный алгоритм). Оценка эффективности.
18. Алгоритм вычисления НОД( $a,b$ ) в  $Z$  через примарное разложение. Оценка эффективности.
19. Расширенный алгоритм Евклида в  $Z$ . Оценка эффективности.
20. Алгоритмы вычисления НОД( $a,b$ ) в кольцах многочленов  $k[x]$  и  $Z[x]$ . Последовательность полиномиальных остатков (PRS).
21. Обобщенный алгоритм Евклида для многочленов с целыми коэффициентами. Евклидов алгоритм PRS. Алгоритм примитивных PRS.
22. Модулярный алгоритм вычисления НОД многочленов. Алгоритм проверки взаимной простоты многочленов. Границы для коэффициентов делителя полинома.